

CSÖKE LAJOS

## STURM TÉTELÉNEK GYAKORLATI ALKALMAZÁSÁRÓL

**ABSTRACT:** *(Praktical aplication of Sturm's theory)*

*In the numerical methods of Mathematics there are a lot of procedure on approximatly calculation of the real roots of a polynomial with real coeffitients. All the systems need an interval, which contents a root of the polynomial.*

*The application of Sturm's theory gives a method for calculation of the number and sign of the real roots.*

*In this paper we show a computer program which, applicates Sturm's theory completing with the system of binary researching, for finding useable intervals. (Their lengths are not greater then 5 units).*

A klasszikus matematika jónéhány numerikus eljárást ismer a függvények zérushelyének közelítő meghatározására. Ezek gyakorlati alkalmazása a számítástechnika elterjedésével egyre nagyobb teret kapott. Különös jelentőségű a valós együtthatós polinomok zérushelyének meghatározása. Egy-egy gyök tetszőleges pontossággal kiszámítható, és még harmad-negyedfok esetén is megkiméli a felhasználót a fárasztó számolási munkától. A különböző eljárások közös vonása, hogy feltételezik egy zárt intervallum ismeretét, ahol a polinomnak van (lehetőleg egy) zérushelye. Így ezek

sikeres alkalmazásánál szükségünk van ilyen intervallumok meghatározására. Sturm tételének ([1] 259. old.) alkalmazása lehetőséget ad a polinom valós gyökei számának és előjelének meghatározására. Sturm tételének alkalmazását hátráltatta, annak számolásigényessége, így a gyökök számának meghatározásához szívesebben alkalmaznak becslési módszereket. A mellékelt számítógépes program bináris keresés módszerének felhasználásával a  $(-10000; +10000)$  intervallumba eső gyököket lokalizálja úgy, hogy megad egy legfeljebb 5 egység hosszú intervallumot, melyben a polinomnak pontosan egy zérushelye van. Ha a behatárolt intervallumban a zérushelyek különbségének abszolút értéke kisebb mint egy, úgy kiválaszt egy olyan egységnyi hosszú intervallumot, melyben található legalább egy gyök.

A program működéséhez kapcsolódó fontosabb megjegyzések: A polinom fokszámának és együtthatóinak beolvasása után a program generálja a polinom Sturm-féle rendszerét és a rendszer polinomjainak együtthatóit a  $H(I, K)$  kétdimenziós tömbben helyezi el. Az első index a rendszerhez tartozó polinom sorszámát, a második a polinom megfelelő fokszámú tagjához tartozó együttható sorszámát regisztrálja.

A rendszer tagjai:

$$h_0(x)=p(x), \quad h_1(x)=p'(x), \dots, \quad h_k(x) = h_{k+1}(x) \cdot q_{n+1}(x) - h_{k+2}(x) \\ (K=0, 1, \dots, n)$$

A rendszer meghatározásakor kijelzi, ha a polinomnak többszörös gyöke van.

A következő fázisban megállapítja a negatív illetve a nem negatív gyökök számát.

A  $-\infty$ -ben vett előjelváltozások számát  $G(1)$ , a 0-nál  $G(3)$ ,  $+\infty$ -ben  $G(2)$  gyűjti. A Sturm-féle rendszer valamennyi polinomjának előjele megegyezik főegyütthatójának előjelével

$+\infty$ -ben, illetve  $-\infty$ -ben a főegyüttható előjelével, ha annak fokszáma páros, és főegyüttható  $-1$  szeresének előjelével, ha annak fokszáma páratlan. Egy tetszőleges  $c$  helyen a rendszer bármely tagjának előjelét a  $h_k(c)$  előjele adja meg. Miután a rendszer tagjaihoz tartozó előjelek sorozatában az előjel változások száma pontosan eggyel csökken, ha a növekvő helyettesítési értékek sorozata a polinom egy gyökén halad át, így  $G(1) - G(3)$  a negatív,  $G(3) - G(2)$  a nem negatív gyökök számát adja.

Amennyiben a polinomnak van valós gyöke, akkor a program megvizsgálja, hogy azok mindegyikére teljesül-e hogy abszolút értékük nagyobb mint 10000. (Ez az érték változtatható). Ha van  $-10000$  és  $+10000$  közé eső gyök, akkor bináris kereséssel szűkíti a gyök elhelyezkedését megadó intervallumot. Ha egy pozitív és egy negatív előjelű gyököt lokalizált, az eljárást akkor fejezi be, ha a végpontok különbségének abszolút értéke nem nagyobb mint 5. Ha a lokalizált intervallumban több gyök található, akkor az intervallumot 1 hosszúságúra szűkíti.

Gyakorlatilag az eljárás alkalmazható egy gyök adott pontosságu meghatározására is, de erre a célra hatékonyabb eljárások is ismeretesek.

```

1 REM *GYOKKERESES STURM MODSZEREVEL*
2 PRINT " *GYOKKERESES STURM MODSZEREVEL* "
3 B$=" INTERVALLUMBAN PONTOSAN EGY GYOK VANI"
10 INPUT "A POLINOM FOKSZÁMA: ";N
15 PRINT "AZ EGYÜTTHATOK/A(N)-A(0): "
17 REM *AZ EGY. HATOK BEOLV+ A MARADEKRENDSZER GENERALASA*
20 DIM H(N,N),A(N),B(N-1)
30 FOR I=0 TO N: INPUT H(0,N-I):NEXT I
35 FOR I=0 TO N-1: H(1,N-1-I)=H(0,N-I)*(N-I):NEXT I

```

```

40 FOR J=2 TO N
50 FOR K=0 TO N+2-J: A(K)=H(J-2,K): NEXT
60 FOR K=0 TO N+1-J: B(K)=H(J-1,K): NEXT
70 T=K-1: K=T
72 FOR I=0 TO N+2-J
75 W=N+2-J-I
80 IF K>W THEN 110
85 IF B(T)=0 THEN PRINT"TOBB SZOROS GYOK!":GOSUB 800: STOP
90 C=A(N+2-J-I)/B(T)
100 FOR L=0 TO K: A=N-I+2-J-L: A(A)=A(A)-C*B(K-L): NEXT L:
    NEXT I
110 FOR L=0 TO K-1: H(J,L)=-A(L): NEXT L: NEXT J
120 FOR I=0 TO N
130 S=-1: IF N-I=INT((N-I)/2)*2 THEN S=1
140 A(N-I)=-1: IF S*H(I,N-I)>=0 THEN A(N-I)=1
145 NEXT: P=1: GOSUB 500
150 FOR I=0 TO N
160 A(N-I)=-1: IF H(I,N-I)>=0 THEN A(N-I)=1
165 NEXT: P=2: GOSUB 500
170 FOR I=0 TO N
180 A(N-I)=-1: IF H(I,0)>=0 THEN A(N-I)=1
190 NEXT: P=3: GOSUB 500
200 PRINT"A NEGATIV VALOS GYOKOK SZAMA=";G(1)-G(3)
210 PRINT"A POZITIV VALOS GYOKOK SZAMA=";G(3)-G(2)
215 IF G(3)-G(2)>0 THEN C=10000: GOSUB 900: REM *POZITIV GYOK
    BEHATAROLAS*
216 IF G(1)-G(3)>0 THEN C=-10000: GOSUB 1020: REM *NEGATIV
    GYOK BEHATAROLAS*
217 STOP
500 REM *AZ ELOJELVALTASOK SZAMANAK H.H.*
501 G(P)=0: X=A(N): FOR I=0 TO N-1

```

```

510 IF X<>A(N-1-I) AND A(N-1-I)<>0 THEN GCF=GCF+1:
    X=A(N-1-I)
520 NEXT I: RETURN
600 REM *A HELY.ERTEKEK ELOJELENEK H.H.*
601 FOR V=0 TO N: Z=V: S=HCV,N-Z)
602 IF V=N THEN 610
605 FOR I=Z+1 TO N: S=S+C+HCV,N-I): NEXT
610 Y=-1: IF S>0 THEN Y=1
615 IF S=0 THEN Y=0
620 A(N-V)=Y: NEXT: RETURN
800 FOR V=0 TO N: FOR Z=V TO N
810 PRINT HCV,N-Z); " ";:NEXT: PRINT: NEXT
900 REM **GYOK*:GOSUB 600: P=4:GOSUB 500
905 IF G(3)-G(4)=0 THEN PRINT "A POZITIV GYOKOK NAGYOBBAK
    MINT 10000":RETURN
907 G(3)=G(4)
910 L=C:FOR J=1 TO 2 STEP 0: C=INT(S*(C+L))/10: GOSUB 600:
    GOSUB 500
920 IF G(3)-G(4)=1 THEN A=G(4): GOSUB 1000: IF WE=1 THEN
    WE=0: RETURN
925 IF G(3)-G(4)>1 THEN U=C: A=G(4)
930 IF G(3)-G(4)=0 THEN L=C
950 IF L-U<5 THEN PRINT "ACZ); U; "-"; L; " INTERVALLUMBAN";
    G(3)-A; " GYOK VAN!":RETURN
970 NEXT
1000 IF ABS(C-U)<5 THEN PRINT"ACZ) ";U; "-";C;B$:WE=1:RETURN
1010 L=C: RETURN
1015 PRINT U,C,L: PRINT G(3),G(4)
1020 REM* - GYOK *: GOSUB 600: P=4: GOSUB 500
1025 IF G(3)-G(4)=0 THEN PRINT"A NEGATIV GYOKOK KISEBBEK MINT
    - 10000": RETURN

```



```
1026 G(1)=G(4)
1030 U=0: L=C: FOR J=1 TO 2 STEP 0: C=INT(5*(U+L))/10: IF
    WA=0 THEN GOSUB 1150
1035 GOSUB 600: GOSUB 500
1040 IF G(1)-G(4)=1 THEN U=C: A=G(4): GOSUB 1110: IF WE=1
    THEN WE=0: RETURN
1050 IF G(1)-G(4)=>1 THEN U=C: A=G(4)
1060 IF G(1)-G(4)=0 THEN L=C: FI=0
1065 E=ABS(L-U)
1070 IF E<2 THEN GOSUB 1130: RETURN
1080 NEXT
1090 IF U-L<5 THEN PRINT " A(Z) ";U;"-";L;B$:WE=1: RETURN
1100 L=C: RETURN
1110 IF ABS(L-U)<5 THEN PRINT " A(Z) ";L;"-";U;B$:WE=1: RETURN
1120 RETURN
1130 PRINT "A(Z)";L;"- ";U;" INTERVALLUMBAN";G(1)-A;" GYOK
    VAN!": RETURN
1150 S=H(0,N)
1155 FOR I=1 TO N: S=S*(G+H(0,N-1)): NEXT
1160 IF S=0 THEN PRINT G;"ZERUSHELYE A POLINOMNAK": STOP
1170 RETURN
```

\*GYOKKERESES STURM MODSZEREVEL\*

```
      A POLINOM FOKSZAMA: ? 4
AZ EGYUTTHATOK/AC(N)-AC(0)/: ( )
? 1
? -62
? 1104
? -4258
? -5425
```

A NEGATIV VALÓS GYOKOK SZÁMA= 1

A POZITIV VALÓS GYOKOK SZÁMA= 3

$A(Z)$  24.3 - 31.2 INTERVALLUMBAN 2 GYOK VAN!

$A(Z)$ -1.3 - 0 INTERVALLUMBAN 1 GYOK VAN!

#### IRODALOM

- [1] A.G. Kuros: Felsőbb algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [2] Obádovics J. Gyula: Gyakorlati számítási eljárások, Gondolat Kiadó, 1972.
- [3] Ury László: Commodore 64 BASIC felhasználási kézikönyv, LSI Alkalmazástechnikai Tanácsadó Szolgálat, Budapest, 1985.